

M A T E M A T I K A 1

L E K C I J A 1

2-L1 VEKTORSKA ALGEBRA

Definicija vektora

Orijentisana duž — svaka duž za čije krajeve je određen redosled. *Ekvivalentne orijentisane duži* — one koje imaju isti pravac, isti smer, isti intenzitet. *Vektor* — svaka klasa ekvivalencije orijentisanih duži, kao i skup svih tačaka (nula vektor). Ove klase ekvivalencije predstavljamo njihovim elementima; tako, obično govorimo da su vektori orijentisane duži ili tačke, a da su dva takva vektora jednaka ako su to dve ekvivalentne orijentisane duži ili dve tačke.

Teorema o jednakim vektorima: Vektori \overrightarrow{AB} i $\overrightarrow{A_1B_1}$ su jednaki ako i samo ako su $\overrightarrow{AA_1}$ i $\overrightarrow{BB_1}$ jednaki. Dokaz — na vežbama (AG).

Sabiranje vektora

Zbir dva vektora $\overrightarrow{a} = \overrightarrow{AB}$ i $\overrightarrow{b} = \overrightarrow{BC}$ — vektor \overrightarrow{AC} . Oznaka — $\overrightarrow{a} + \overrightarrow{b}$.

Korektnost definicije zbira — na vežbama (AG).

Svojstva sabiranja vektora:

$$1^0 \left(\overrightarrow{a} + \overrightarrow{b} \right) + \overrightarrow{c} = \overrightarrow{a} + \left(\overrightarrow{b} + \overrightarrow{c} \right) \text{ (asocijativnost);}$$

$$2^0 \overrightarrow{a} + \overrightarrow{0} = \overrightarrow{0} + \overrightarrow{a} = \overrightarrow{a} \text{ (egzistencija neutralnog elementa);}$$

$$3^0 \overrightarrow{a} + (-\overrightarrow{a}) = -\overrightarrow{a} + \overrightarrow{a} = \overrightarrow{0} \text{ (egzistencija suprotnog elementa);}$$

$$4^0 \overrightarrow{b} + \overrightarrow{a} = \overrightarrow{a} + \overrightarrow{b} \text{ (komutativnost);}$$

tj. V (skup svih vektora) čini jednu komutativnu (Abelovu) grupu u odnosu na operaciju sabiranje vektora.

$$\text{Razlika dva vektora} \text{ — } \overrightarrow{a} - \overrightarrow{b} := \overrightarrow{a} + (-\overrightarrow{b}).$$

Pravila: trougla, paralelograma, poligona, paralelopipeda — na vežbama (AG).

Nejednakost trougla —

$$\left| |\vec{a}| - |\vec{b}| \right| \leq |\vec{a} + \vec{b}| \leq |\vec{a}| + |\vec{b}|.$$

Množenje vektora skalarom

Proizvod skalaru h i vektora \vec{a} — ako $h \neq 0$ i $\vec{a} \neq 0$, onda $h\vec{a}$ vektor za koji je $|h\vec{a}| = |h| |\vec{a}|$, pravac kao kod \vec{a} , a smer isti kao kod \vec{a} , odnosno suprotan, ako je $h > 0$, odnosno $h < 0$; ako $h = 0$ ili $\vec{a} = 0$ onda $h\vec{a} := 0$.

Svojstva množenja vektora skalarom:

$$\mathbf{1}^0 \quad k(h\vec{a}) = (kh)\vec{a};$$

$$\mathbf{2}^0 \quad (h+k)\vec{a} = h\vec{a} + k\vec{a} \text{ (distributivnost u odnosu na sabiranje skalaru);}$$

$$\mathbf{3}^0 \quad h(\vec{a} + \vec{b}) = h\vec{a} + h\vec{b} \text{ (distributivnost u odnosu na sabiranje vektora).}$$

Kolinearni vektori — oni koji imaju isti pravac ili je neki od njih nula-vektor.

Podela duži u datom odnosu: date tačke O, A, B i broj $\lambda > 0$. Ako je S tačka koja deli duž AB u odnosu $\lambda : 1$, tada je $\vec{OS} = \frac{1}{1+\lambda} (\vec{OA} + \lambda \vec{OB})$.
Dokaz — na vežbama (AG).

Ortogonalno projektovanje vektora

Ugao između dva vektora $\vec{a} = \vec{OA} \neq 0$ i $\vec{b} = \vec{OB} \neq 0$ — $\angle(\vec{a}, \vec{b}) := \angle(AOB)$ (konveksan).

$$\vec{a} \perp \vec{b} \text{ ako } \angle(\vec{a}, \vec{b}) = \frac{\pi}{2} \text{ ili } \vec{a} = 0 \text{ ili } \vec{b} = 0.$$

Korektnost definicije ugla — na vežbama (AG).

Projekcija vektora $\vec{a} = \vec{AB}$ na ravan α (na pravu s) — vektor $\vec{a'} = \vec{A'B'}$, gde je $A' (B')$ projekcija tačke $A (B)$. Oznaka — $\vec{a'} = \text{Pr}_\alpha \vec{a} (\text{Pr}_s \vec{a})$.

Korektnost definicije projekcije vektora na ravan (na pravu) — na vežbama (AG).

Projekcija vektora \vec{a} na osu \vec{s} (na vektor $\vec{b} \neq 0$) — algebarska vrednost vektora $\vec{a'} = \text{Pr}_s \vec{a}$ na osi \vec{s} (isto, za bilo koju osu \vec{s} čiji jedinični vektor je $\frac{1}{|\vec{b}|} \vec{b}$). Oznaka — $\text{Pr}_{\vec{s}} \vec{a} (\text{Pr}_{\vec{b}} \vec{a})$.

Svojstva projektovanja vektora:

$$\mathbf{1}^0 \quad \text{Pr}(h\vec{a}) = h \text{Pr} \vec{a};$$

$$\mathbf{2}^0 \quad \text{Pr}(\vec{a}_1 + \vec{a}_2) = \text{Pr} \vec{a}_1 + \text{Pr} \vec{a}_2.$$

Dokaz — samostalno.

Skalarno množenje vektora

Skalarni proizvod dva vektora \vec{a} i \vec{b} , $\vec{a} \cdot \vec{b}$, jednak je $|\vec{a}| \cdot |\vec{b}| \cdot \cos \angle(\vec{a}, \vec{b})$ ako je $\vec{a} \neq 0$ i $\vec{b} \neq 0$, a $\vec{a} \cdot \vec{b} := 0$ ako je $\vec{a} = 0$ ili $\vec{b} = 0$.

Veza skalarnog proizvoda i projekcije vektora na vektor — $\vec{a} \cdot \vec{b} = |\vec{b}| \operatorname{Pr}_{\vec{b}} \vec{a}$ ($\vec{b} \neq 0$). Dokaz — na vežbama (AG).

Svojstva skalarnog množenja vektora:

$$1^0 (h\vec{a}) \cdot \vec{b} = h(\vec{a} \cdot \vec{b});$$

$2^0 (\vec{a}_1 + \vec{a}_2) \cdot \vec{b} = \vec{a}_1 \cdot \vec{b} + \vec{a}_2 \cdot \vec{b}$ (distributivnost u odnosu na sabiranje vektora);

$$3^0 \vec{b} \cdot \vec{a} = \vec{a} \cdot \vec{b} \text{ (komutativnost).}$$

Dokaz — na vežbama (AG).

$$\vec{a} \cdot \vec{b} = 0 \Leftrightarrow \vec{a} \perp \vec{b}.$$

$$\vec{a} \cdot \vec{a} = |\vec{a}|^2.$$

Vektorsko množenje vektora

Komplanarni vektori — oni za koje postoji ravan kojoj su svi oni paralelni. Orijentacija uređene trojke vektora: uređena trojka $(\vec{a}, \vec{b}, \vec{c})$ nekomplanarnih vektora $\vec{a} = \overrightarrow{OA}$, $\vec{b} = \overrightarrow{OB}$ i $\vec{c} = \overrightarrow{OC}$ ima desnu (levu) orijentaciju ako se orijentisanjem ugla $\angle AOB$ od kraka OA ka kraku OB dobija pozitivno (negativno) orijentisan ugao gledajući s one strane ravni AOB sa koje je tačka C .

Vektorski proizvod dva vektora \vec{a} i \vec{b} je vektor \vec{c} , takav da je:

(i) $\vec{c} = 0$ ako je $\vec{a} = 0$ ili $\vec{b} = 0$;

(ii) $|\vec{c}| = |\vec{a}| \cdot |\vec{b}| \cdot \sin \angle(\vec{a}, \vec{b})$ ako je $\vec{a} \neq 0$ i $\vec{b} \neq 0$;

(iii) $\vec{c} \perp \vec{a}$, $\vec{c} \perp \vec{b}$ i $(\vec{a}, \vec{b}, \vec{c})$ — d.o., ako je $|\vec{c}| \neq 0$.

$$\vec{a} \times \vec{b} = 0 \Leftrightarrow \vec{a} \parallel \vec{b}.$$

Geometrijska interpretacija intenziteta vektorskog proizvoda: Ako vektori $\vec{a} = \overrightarrow{AB}$ i $\vec{b} = \overrightarrow{AD}$ nisu kolinearni, tada je $|\vec{a} \times \vec{b}|$ jednak površini $P(\vec{a}, \vec{b})$ paralelograma $ABCD$ konstruisanog nad \vec{a} i \vec{b} .

Svojstva vektorskog množenja vektora:

$$\mathbf{1}^0 (h \vec{a}) \times \vec{b} = h (\vec{a} \times \vec{b});$$

$\mathbf{2}^0 (\vec{a}_1 + \vec{a}_2) \times \vec{b} = \vec{a}_1 \times \vec{b} + \vec{a}_2 \times \vec{b}$ (distributivnost u odnosu na sabiranje vektora);

$$\mathbf{3}^0 \vec{b} \times \vec{a} = -\vec{a} \times \vec{b} \text{ (antikomutativnost).}$$

Dokaz — na vežbama (AG).

Mešovito množenje vektora

Mešoviti proizvod tri vektora \vec{a} , \vec{b} i \vec{c} je $(\vec{a} \times \vec{b}) \cdot \vec{c}$. Oznaka — $[\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}]$.

Geometrijska interpretacija mešovitog proizvoda: Ako su \vec{a} , \vec{b} i \vec{c} nekomplanarni vektori, i $V(\vec{a}, \vec{b}, \vec{c})$ označava zapreminu paralelopipeda konstruisanog nad \vec{a} , \vec{b} i \vec{c} , tada je

$$[\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}] = V(\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}) \quad (-V(\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}))$$

ako $(\vec{a}, \vec{b}, \vec{c})$ — d.o. (l.o.). Dokaz — na vežbama (AG).

$[\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}] = 0 \Leftrightarrow \vec{a}, \vec{b}, \vec{c}$ — komplanarni. Dokaz — na vežbama (AG).

Svojstva mešovitog množenja vektora:

$\mathbf{1}^0$ i $\mathbf{2}^0$ kao kod skalarnog i vektorskog množenja;

$\mathbf{3}^0$

$$\begin{aligned} [\vec{c}, \vec{a}, \vec{b}] &= [\vec{b}, \vec{c}, \vec{a}] = [\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}] = \\ &= -[\vec{b}, \vec{a}, \vec{c}] = -[\vec{a}, \vec{c}, \vec{b}] = -[\vec{c}, \vec{b}, \vec{a}]. \end{aligned}$$

Koordinate vektora

Predstavljanje vektora pomoću koordinata: $\vec{i}, \vec{j}, \vec{k}$ — jedinični uzajamno ortogonalni vektori takvi da $(\vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$ — d.o.; tada se svaki vektor \vec{a} može, na jedinstven način, predstaviti u obliku

$$\vec{a} = \alpha_1 \vec{i} + \alpha_2 \vec{j} + \alpha_3 \vec{k}, \quad \alpha_1, \alpha_2, \alpha_3 \in \mathbb{R}.$$

$\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3$ – koordinate vektora \vec{a} (u odnosu na $\vec{i}, \vec{j}, \vec{k}$). Dokaz — na vežbama (AG). Zapravo, $\alpha_1 = \text{Pr}_{\vec{i}} \vec{a}$, $\alpha_2 = \text{Pr}_{\vec{j}} \vec{a}$, $\alpha_3 = \text{Pr}_{\vec{k}} \vec{a}$.

Sabiranje vektora i množenje vektora skalarom u koordinatama: Ako $\vec{a} = (\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3)$ i $\vec{b} = (\beta_1, \beta_2, \beta_3)$, i $h \in \mathbb{R}$, onda

$$\vec{a} + \vec{b} = (\alpha_1 + \beta_1, \alpha_2 + \beta_2, \alpha_3 + \beta_3) \text{ i } h\vec{a} = (h\alpha_1, h\alpha_2, h\alpha_3).$$

Skalarno množenje vektora u koordinatama:

$$\begin{aligned} \vec{a} \cdot \vec{b} &= (\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3) \cdot (\beta_1, \beta_2, \beta_3) = \alpha_1\beta_1 + \alpha_2\beta_2 + \alpha_3\beta_3. \\ |\vec{a}|^2 &= \alpha_1^2 + \alpha_2^2 + \alpha_3^2. \\ \cos \angle(\vec{a}, \vec{b}) &= \frac{\alpha_1\beta_1 + \alpha_2\beta_2 + \alpha_3\beta_3}{\sqrt{\alpha_1^2 + \alpha_2^2 + \alpha_3^2} \sqrt{\beta_1^2 + \beta_2^2 + \beta_3^2}}. \\ \text{Pr}_{\vec{b}} \vec{a} &= \frac{\alpha_1\beta_1 + \alpha_2\beta_2 + \alpha_3\beta_3}{\sqrt{\beta_1^2 + \beta_2^2 + \beta_3^2}}. \end{aligned}$$

Vektorsko množenje vektora u koordinatama:

$$\begin{aligned} \vec{a} \times \vec{b} &= \left(\begin{vmatrix} \alpha_2 & \alpha_3 \\ \beta_2 & \beta_3 \end{vmatrix}, - \begin{vmatrix} \alpha_1 & \alpha_3 \\ \beta_1 & \beta_3 \end{vmatrix}, \begin{vmatrix} \alpha_1 & \alpha_2 \\ \beta_1 & \beta_2 \end{vmatrix} \right) \\ &= \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ \alpha_1 & \alpha_2 & \alpha_3 \\ \beta_1 & \beta_2 & \beta_3 \end{vmatrix}, \end{aligned}$$

ako $\vec{a} = (\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3)$ i $\vec{b} = (\beta_1, \beta_2, \beta_3)$.

Mešovito množenje vektora u koordinatama:

$$[\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}] = \begin{vmatrix} \alpha_1 & \alpha_2 & \alpha_3 \\ \beta_1 & \beta_2 & \beta_3 \\ \gamma_1 & \gamma_2 & \gamma_3 \end{vmatrix},$$

ako $\vec{a} = (\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3)$, $\vec{b} = (\beta_1, \beta_2, \beta_3)$, $\vec{c} = (\gamma_1, \gamma_2, \gamma_3)$.